Egzamin 01.02.2020 – zadanie 3

(rozwiązania poprawne i błędne)

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiory:

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y, z) : xy^2 - z = 2020\}, \\ S &= \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}, \\ M &= \{(x, y, z) : \exists\, t \in \mathbb{R} \ \ T_{(x,y,z)}H \perp T_{(\cos t, \sin t, t)}S\}. \end{aligned}$$

Opisać zbiór M i rozstrzygnąć, czy jest podrozmaitością (klasy C^1) w $\mathbb{R}^3$.

Rozwiązanie. Rozumowanie podzielimy na trzy naturalne części: opis zbiorów H, S i M.

Opis H (wariant I). Zbiór H jest wykresem gładkiej funkcji $h(x, y) = xy^2 - z$, to znaczy $H = \{(x, y, h(x, y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Stąd H jest dwuwymiarową podrozmaitością, a dla $(x, y, z) \in H$ bazą przestrzeni liniowej $T_{(x,y,z)}H$ jest para wektorów $(1, 0, \partial_x h) = (1, 0, y^2)$ i $(0, 1, \partial_y h) = (0, 1, 2xy)$.

Opis H (wariant II). Zbiór H jest poziomicą gładkiej funkcji $h(x, y, z) = xy^2 - z$, to znaczy $H = h^{-1}(2020)$. Co więcej, gradient $\nabla h(x, y, z) = (y^2, 2xy, -1)$ nie znika dla żadnego $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Z twierdzenia o submersji wnioskujemy więc, że H jest dwuwymiarową podrozmaitością, a dla $(x, y, z) \in H$ przestrzeń liniowa $T_{(x,y,z)}H$ jest dopełnieniem ortogonalnym prostej wyznaczonej przez wektor $\nabla h(x, y, z) = (y^2, 2xy, -1)$.

Opis S (wariant I). Zbiór S jest wykresem gładkiej funkcji $s(t) = (\cos t, \sin t)$, to znaczy $S = \{(s(t), t) : t \in \mathbb{R}\}$. Stąd S jest jednowymiarową podrozmaitością, a dla $t \in \mathbb{R}$ przestrzeń liniowa $T_{(\cos t, \sin t, t)}S$ jest rozpięta przez wektor $(s', 1) = (-\sin t, \cos t, 1)$.

Opis S (wariant II). Zbiór S jest poziomicą gładkiej funkcji $s(x, y, z) = (x - \cos z, y - \sin z)$, to znaczy $S = s^{-1}(0)$. Co więcej, różniczka

$$ds(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin z \\ 0 & 1 & -\cos z \end{bmatrix}$$

ma rząd 2 (maksymalny) dla każdego $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Z twierdzenia o submersji wnioskujemy więc, że S jest jednowymiarową podrozmaitością, a dla $(x, y, z) \in S$ przestrzeń liniowa $T_{(x,y,z)}H$ jest jądrem $ds(x, y, z)$, a więc dopełnieniem ortogonalnym przestrzeni rozpiętej na wektorach $(1, 0, \sin z)$ i $(0, 1, -\cos z)$. Łatwo zauważyć, że jest to dokładnie przestrzeń liniowa rozpięta przez wektor $(-\sin z, \cos z, 1)$.

Opis S (wariant III). Zbiór S jest obrazem gładkiej funkcji $s(t) = (\cos t, \sin t, t)$, to znaczy $S = s(\mathbb{R})$. Co więcej, pochodna (*wektor prędkości*) $s'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ nie znika dla żadnego $t \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia o immersji wnioskujemy więc, że S jest jednowymiarową podrozmaitością immersyjną. Dokładniej, dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje $r > 0$, dla którego $s((t-r, t+r))$ jest jednowymiarową podrozmaitością oraz

$$T_{s(t)}s((t-r,t+r)) = \operatorname{lin}(s'(t)) = \operatorname{lin}((-\sin t, \cos t, 1)).$$

Pozostaje zauważyć, że zbiory $S = s(\mathbb{R})$ oraz $s((t-r,t+r))$ zgadzają się na pewnym otoczeniu $s(t)$. Bardziej precyzyjnie, pierwszy z nich daje drugi po obcięciu do otoczenia $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : t-r < z < t+r\}$. Dzięki temu cały zbiór S jest jednowymiarową podrozmaitością i

$$T_{s(t)}S = T_{s(t)}s((t-r,t+r)) = \operatorname{lin}((-\sin t, \cos t, 1)).$$

Opis M (wariant I). Rozważmy dwa punkty $(x,y,z) \in H$ i $(\cos t, \sin t, t) \in S$. Znając bazy przestrzeni stycznych do H i S, warunek $T_{(x,y,z)}H \perp T_{(\cos t, \sin t, t)}S$ możemy zapisać jako układ równań

$$\begin{cases} (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (1, 0, y^2) = 0, \\ (-\sin t, \cos t, 1) \cdot (0, 1, 2xy) = 0. \end{cases}$$

Inaczej, $y^2 = \sin t$ i $2xy = -\cos t$. Jeśli te dwa równania są spełnione, to

$$1 = (\sin t)^2 + (-\cos t)^2 = (y^2)^2 + (2xy)^2 = y^4 + 4x^2y^2.$$

I odwrotnie, jeśli $y^4 + 4x^2y^2 = 1$, to istnieje $t \in \mathbb{R}$ rozwiązujące układ równań. Zbiór M można więc opisać przez dwa warunki $(x,y,z) \in H$ i $y^4 + 4x^2y^2 = 1$. Jest zatem poziomicą gładkiej funkcji $m(x,y,z) = (y^4 + 4x^2y^2, xy^2 - z)$, to znaczy $M = m^{-1}(1, 2020)$. Co więcej, różniczka

$$dm(x,y,z) = \begin{bmatrix} 8xy^2 & 4y^3 + 8x^2y & 0 \\ y^2 & 2xy & -1 \end{bmatrix}$$

ma rząd 2 (maksymalny) dla każdego $(x,y,z) \in M$. Istotnie, z warunku $y^4 + 4x^2y^2 = 1$ wynika $y \neq 0$, a więc $4y^3 + 8x^2y = 4y(y^2 + 2x^2) \neq 0$, a stąd już otrzymujemy liniową niezależność drugiej i trzeciej kolumny. Z twierdzenia o submersji wnioskujemy więc, że M jest jednowymiarową podrozmaitością.

Opis M (wariant II). Gdyby znać opis przestrzeni normalnej $(T_{(x,y,z)}H)^{\perp} = \operatorname{lin}((y^2, 2xy, -1))$ i przestrzeni stycznej $T_{(\cos t, \sin t, t)}S = \operatorname{lin}((-\sin t, \cos t, 1))$, to warunek $T_{(x,y,z)}H \perp T_{(\cos t, \sin t, t)}S$

możemy interpretować jako równoległość wektorów $(y^2, 2xy, -1)$ i $(-\sin t, \cos t, 1)$. Ze względu na ostatnią współrzędną jest to równoważne równości $(y^2, 2xy, -1) = -(-\sin t, \cos t, 1)$. Dalej rozwiązanie przebiega analogicznie.

Opis M (wariant III). Jeśli warunek prostopadłości umiemy już przeformułować jako parę równań $y^2 = \sin t$ i $2xy = -\cos t$, można opisać M parametryzacją. Zacznijmy od zauważenia, że z pierwszego równiania wynika $\sin t \geqslant 0$. Przy pomocy drugiego możemy się ograniczyć do $\sin t > 0$ (gdyż jeśli $y^2 = \sin t = 0$, to również $\cos t = 2xy = 0$). Możemy więc w terminach $t \in (0, \pi)$ wyliczyć $y = \pm\sqrt{\sin t}$, a następnie $x = -\frac{\cos t}{2y}$ i $z = xy^2 - 2020$. Ostatecznie, oznacza to, że

$$\begin{aligned} M &= m_1(\mathbb{R}) \cup m_2(\mathbb{R}), \\ \text{gdzie } m_1(t) &= \left(-\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}, \sqrt{\sin t}, -\tfrac{1}{2}\cos t\sqrt{\sin t} - 2020\right), \\ m_2(t) &= \left(\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}, -\sqrt{\sin t}, \tfrac{1}{2}\cos t\sqrt{\sin t} - 2020\right). \end{aligned}$$

Przy odrobinie wysiłku można uzasadnić, że rzeczywiście jest to jednowymiarowa podrozmaitość (powołujemy się na twierdzenie o immersji, zauważamy monotoniczność drugiej współrzędnej, rozdzielamy $m_1(\mathbb{R})$ i $m_2(\mathbb{R})$ płaszczyzną $y = 0$). $\square$

A teraz przykładowe fragmenty błędnych rozumowań.

- H jest poziomicą funkcji $h(x,y,z) = xy^2 - z$, więc
$$T_{(x,y,z)}H = (\nabla h(x,y,z))^{\perp} = ((y^2, 2xy, -1))^{\perp}.$$

  Wyjaśnienie. Twierdzenie o submersji ma swoje założenia.

- S jest parametryzowane gładką funkcją $s(t) = (\cos t, \sin t, t)$ o nieznikającym wektorze prędkości $s'(t)$, więc
$$T_{s(t)}S = \mathrm{lin}(s'(t)) = \mathrm{lin}((-\sin t, \cos t, 1)).$$

  Wyjaśnienie. To nie jest teza twierdzenia o immersji. Np. krzywa zadana przez $s(t) = (\frac{1}{2}t + \cos t, \sin t)$ spełnia podobne przesłanki, a ma samoprzecięcia.

- S jest parametryzowane gładką różnowartościową funkcją $s(t) = (\cos t, \sin t, t)$ o nieznikającym wektorze prędkości $s'(t)$, więc
$$T_{s(t)}S = \mathrm{lin}(s'(t)) = \mathrm{lin}((-\sin t, \cos t, 1)).$$

  Wyjaśnienie. To nie jest teza twierdzenia o immersji. Np. krzywa na torusie zadana przez złożenie $t \mapsto (t, \sqrt{2}t)$ i $(t,s) \mapsto ((2+\cos t)\cos s, (2+\cos t)\sin s, \sin t)$ spełnia podobne przesłanki, a jest gęstym podzbiorem torusa.

- $S = \{x^2 + y^2 = 1\}$.
  Wyjaśnienie. Nie, to jest powierzchnia walca $\{(\cos t, \sin t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

- $S = \{x^2 + y^2 = 1,\ x = \cos z\}$.
  Wyjaśnienie. Nie, to jest suma mnogościowa S i drugiej spirali $\{(\cos t, -\sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

- $M = \{(x,y,z) : y^4 + 4x^2y^2 = 1\}$
  Wyjaśnienie. Nie, w punkcie $(x,y,z) = (1,0,0)$ należącym do powyższego zbioru nie ma nawet sensu warunek $T_{(x,y,z)}H \perp T_{(\cos t, \sin t, t)}S$, gdyż $(1,0,0) \notin H$.

- $M = \{(x,y,z,t) : xy^2 - z = 2020,\ y^2 = \sin t,\ 2xy = -\cos t\}$
  Wyjaśnienie. Dodanie t jako dodatkowej współrzędnej jest trochę nie na temat; w rezultacie nawet wymiar się nie zgadza. To rozumowanie można jednak odratować – powyższy zbiór $M' \subseteq \mathbb{R}^4$ jest podrozmaitością (na mocy twierdzenia o submersji), a M jego obrazem przy przekształceniu $\pi(x,y,z,t) = (x,y,z)$. Pozostaje sprawdzić, że $d\pi(x,y,z,t)|_{T_{(x,y,z,t)}M'}$ ma trywialne jądro, co pozwala uzasadnić, że M jest podrozmaitością.

- $M = \{(x, y, t) : y^2 = \sin t,\ 2xy = -\cos t\}$
  Wyjaśnienie. Tym razem wymiar się przypadkiem zgadza, ale tylko dzięki zapomnieniu o jednej współrzędnej.

- M jest poziomicą funkcji gładkiej $m\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ i $\nabla m(p) = (0, 0, 0)$ dla pewnego $p \in M$, więc M nie jest podrozmaitością.
  Wyjaśnienie. Nie ma takiego twierdzenia. Np. funkcja $(x^2+y^2+z^2-1)^2$ spełnia podobne przesłanki, a $\mathbb{S}^2$ jest podrozmaitością mimo to.